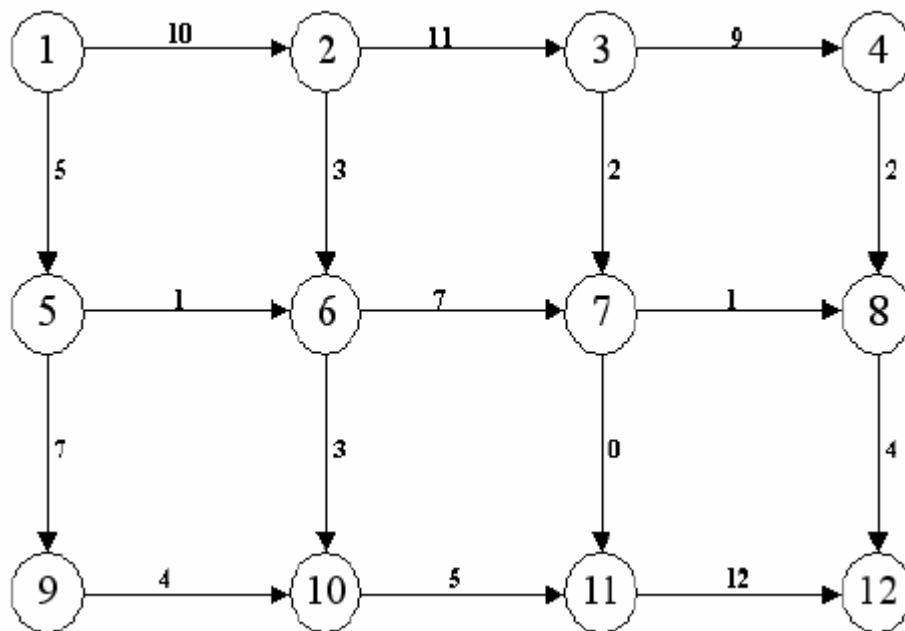




**Clase Auxiliar N° 9**  
**28 de octubre de 2004**

**Pregunta 1**

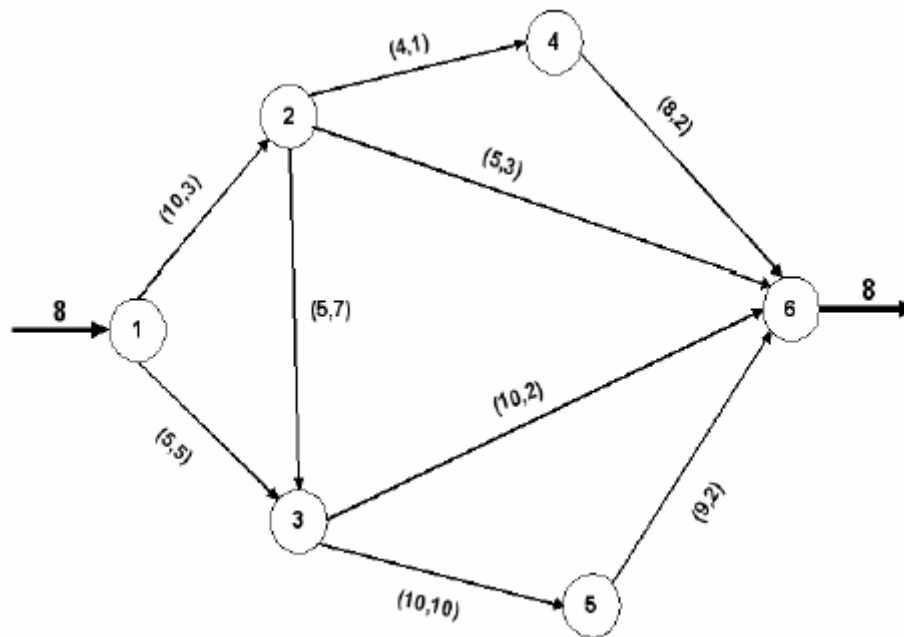
Se tiene el siguiente problema de flujo en redes, donde la información entregada en cada arco corresponde al costo unitario de desplazarse por ese arco. El grafo asociado al problema se muestra a continuación.



Utilice el algoritmo de Dijkstra para encontrar la ruta más corta partiendo desde el nodo 1.

**Problema 2**

Se tiene el siguiente problema de flujo en redes, donde la información entregada en cada arco corresponde a la cota superior y el costo unitario de ese arco. El grafo asociado al problema se muestra a continuación:



Una solución factible del problema es:  $f_{12}=8$ ,  $f_{13}=0$ ,  $f_{23}=5$ ,  $f_{24}=3$ ,  $f_{26}=0$ ,  $f_{35}=5$ ,  $f_{36}=0$ ,  $f_{46}=3$ ,  $f_{56}=5$ . Con la información entregada resuelva el problema.

Dudas y/o consultas:  
 Marianela Pereira C.  
**[mapereir@ing.uchile.cl](mailto:mapereir@ing.uchile.cl)**



**Pauta Auxiliar N° 9**  
**28 de octubre de 2004**

**Pregunta 1**

Para utilizar el algoritmo de Dijkstra es necesario mantener información sobre dos conjuntos que irán variando en las iteraciones, estos son el conjunto  $V$  de todos los nodos que falta por visitar y el conjunto  $T$  de todos los nodos que ya han sido visitados, y se debe almacenar el costo de llegar a ese nodo. Inicialmente todos los costos se encuentran en 1. Inicialmente en este problema  $V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$  y  $T = \{\emptyset\}$ . El criterio de detención se producirá cuando  $V = \{\emptyset\}$ . Inicialmente se ingresa el nodo inicial 1, quedando los conjuntos:  $T = \{1\}$  y  $V = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ .

Iteración 1: Se debe determinar que nodo debe ingresar al conjunto  $T$ . Para ello, es necesario determinar el camino más corto para ir desde los nodos que se encuentran en conjunto  $T$  hacia los nodos que se encuentran en el conjunto  $V$ . En la Figura 2 se puede apreciar que el nodo 1 ha sido escogido, luego se agrega la información del costo de ir desde el nodo 1 a los nodos de  $V$  que estén unidos por un sólo arco. Este costo se debe guardar (en la Figura 2 aparece arriba de los arcos que pueden ser alcanzados desde algún nodo perteneciente a  $T$ ).

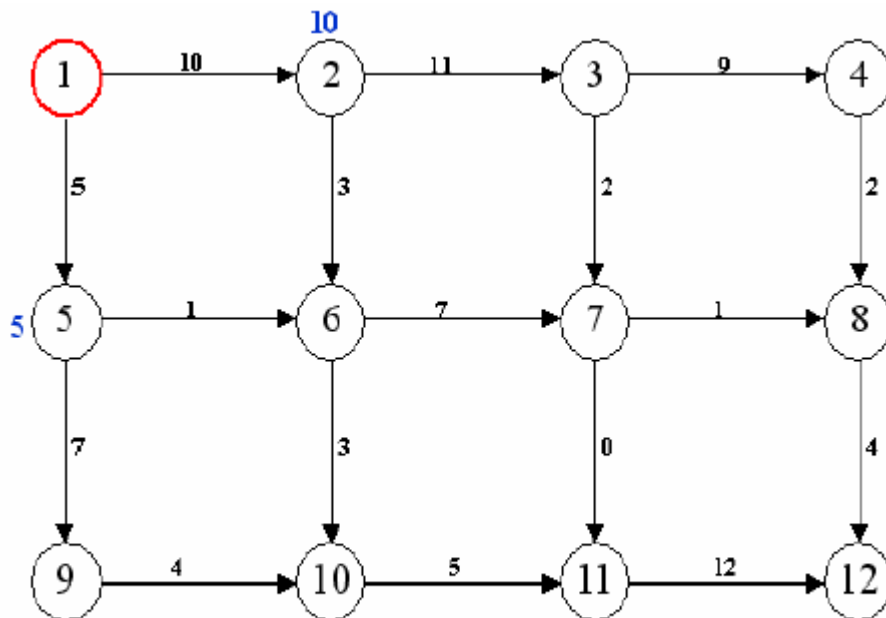


Figura 2: Grafo asociado al problema.

Iteración 2: El nodo que pertenece a  $V$  y que puede ser visitado a menor costo es el nodo 5 (a costo 5). Luego, los conjuntos quedan:  $T = \{1; 5\}$  y  $V = \{2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ . Los valores para la nueva iteración se muestran en la Figura 3.

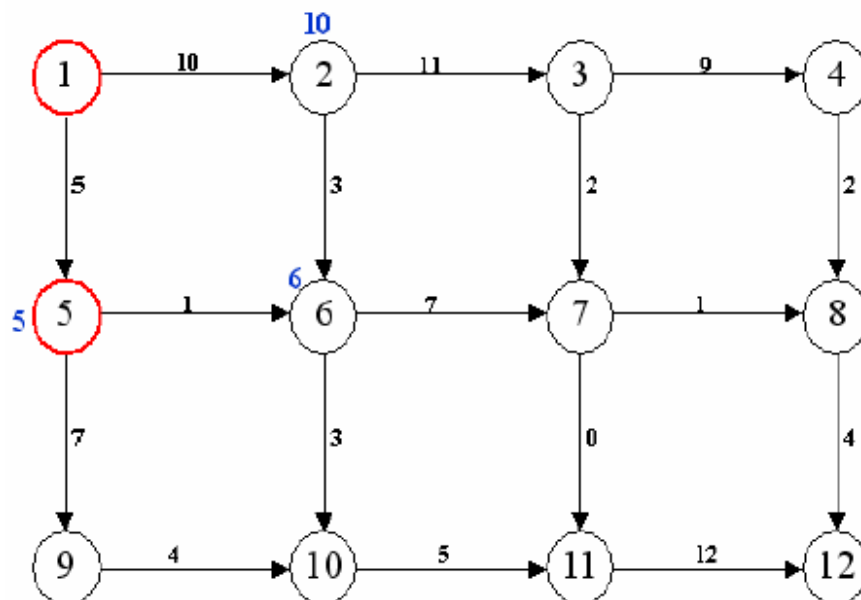


Figura 3: Grafo asociado al problema.

Iteración 3: El nodo que pertenece a  $V$  y que puede ser visitado a menor costo es el nodo 6 (a costo 6). Luego, los conjuntos quedan:  $T = \{1; 5; 6\}$  y  $V = \{2; 3; 4; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ . Los valores para la nueva iteración se muestran en la Figura 4.

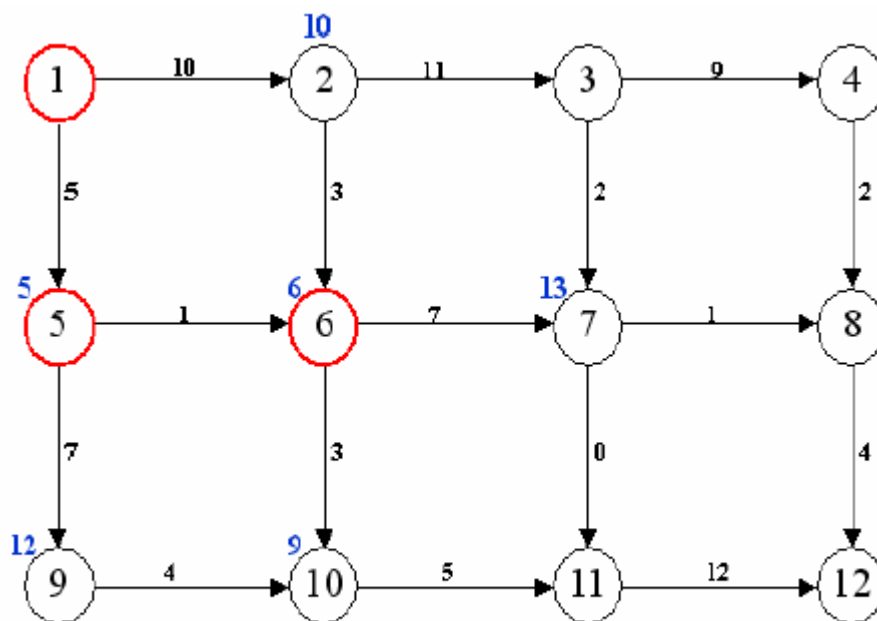


Figura 4: Grafo asociado al problema.

Iteración 4:

El nodo que pertenece a  $V$  y que puede ser visitado a menor costo es el nodo 10 (a costo 9). Luego, los conjuntos quedan:  $T = \{1; 5; 6; 10\}$  y  $V = \{2; 3; 4; 7; 8; 9; 11; 12\}$ . Los valores para la nueva iteración se muestran en la Figura 5.

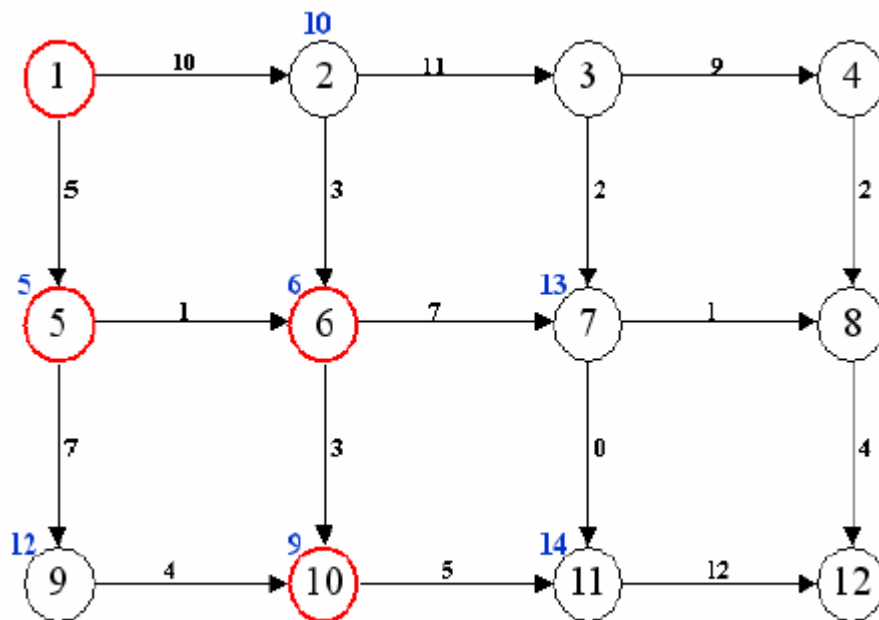


Figura 5: Grafo asociado al problema.

Iteración 5:

El nodo que pertenece a  $V$  y que puede ser visitado a menor costo es el nodo 2 (a costo 10). Luego, los conjuntos quedan:  $T = \{1; 2; 5; 6; 10\}$  y  $V = \{3; 4; 7; 8; 9; 11; 12\}$ . Los valores para la nueva iteración se muestran en la Figura 6.

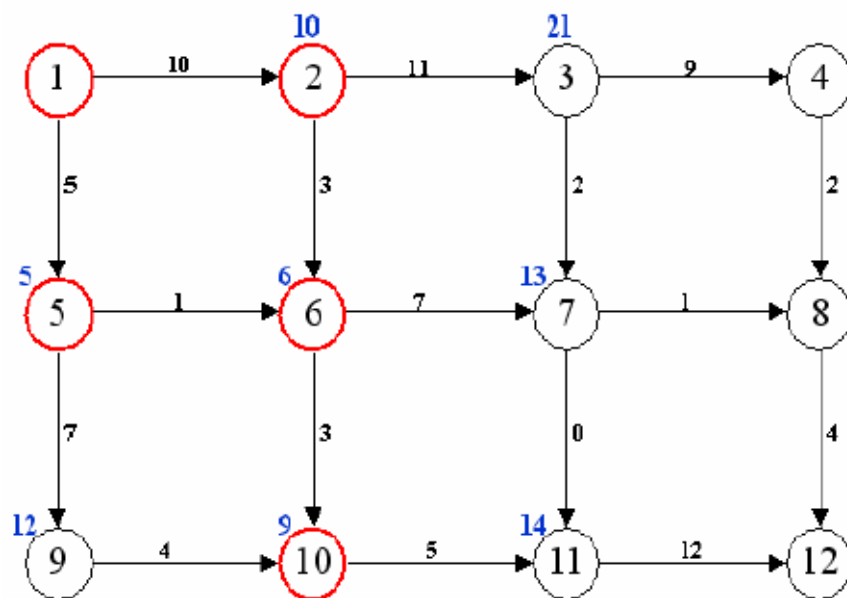


Figura 6: Grafo asociado al problema.

Iteración 6: El nodo que pertenece a  $V$  y que puede ser visitado a menor costo es el nodo 9 (a costo 12). Luego, los conjuntos quedan:  $T = \{1; 2; 5; 6; 9; 10\}$  y  $V = \{3; 4; 7; 8; 11; 12\}$ . Los valores para la nueva iteración se muestran en la Figura 7.

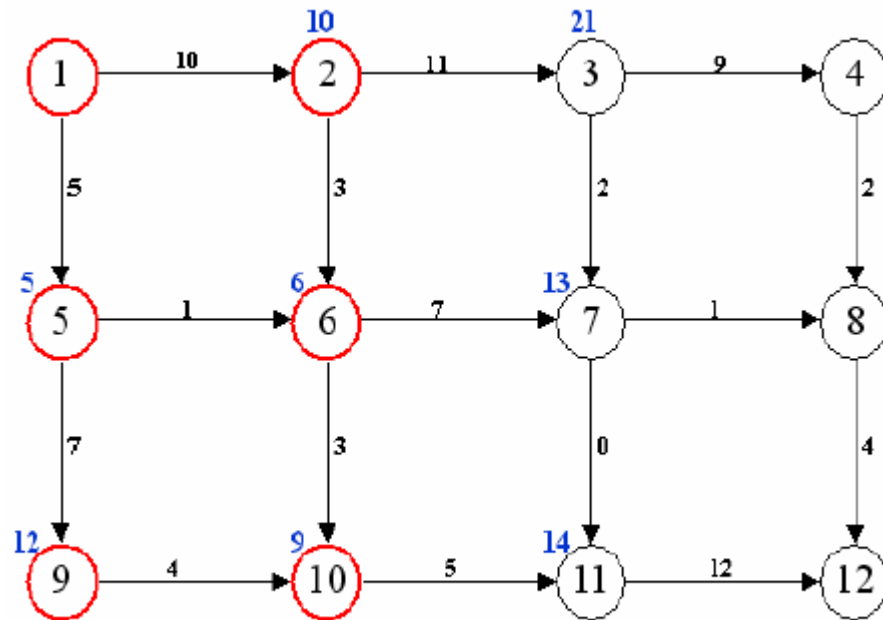


Figura 7: Grafo asociado al problema.

Iteración 7: El nodo que pertenece a  $V$  y que puede ser visitado a menor costo es el nodo 7 (a costo 13). Luego, los conjuntos quedan:  $T = \{1; 2; 5; 6; 7; 9; 10\}$  y  $V = \{3; 4; 8; 11; 12\}$ . Los valores para la nueva iteración se muestran en la Figura 8.

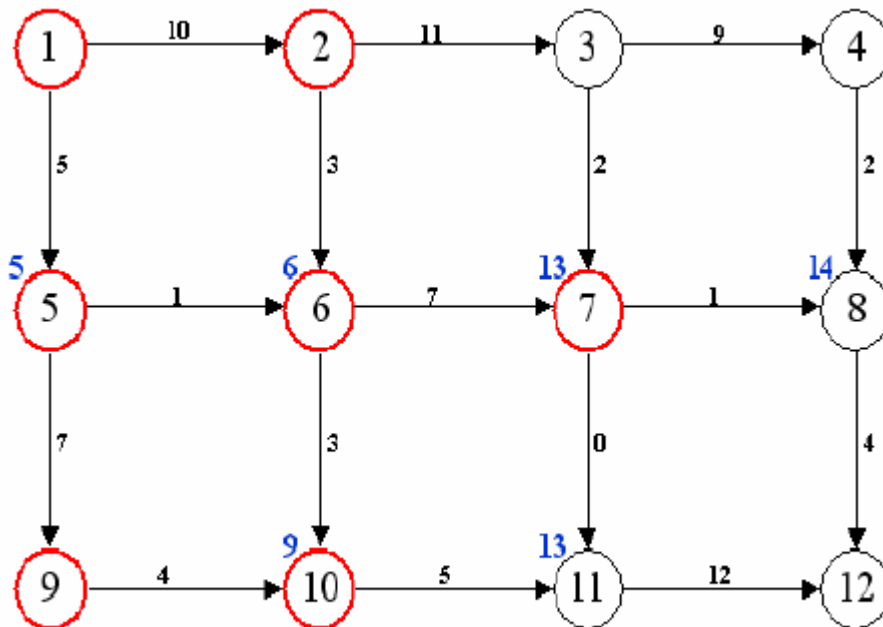


Figura 8: Grafo asociado al problema.

Iteración 8: El nodo que pertenece a  $V$  y que puede ser visitado a menor costo es el nodo 11 (a costo 13). Luego, los conjuntos quedan:  $T = \{1; 2; 5; 6; 7; 9; 10; 11\}$  y  $V = \{3; 4; 8; 12\}$ . Los valores para la nueva iteración se muestran en la Figura 9.

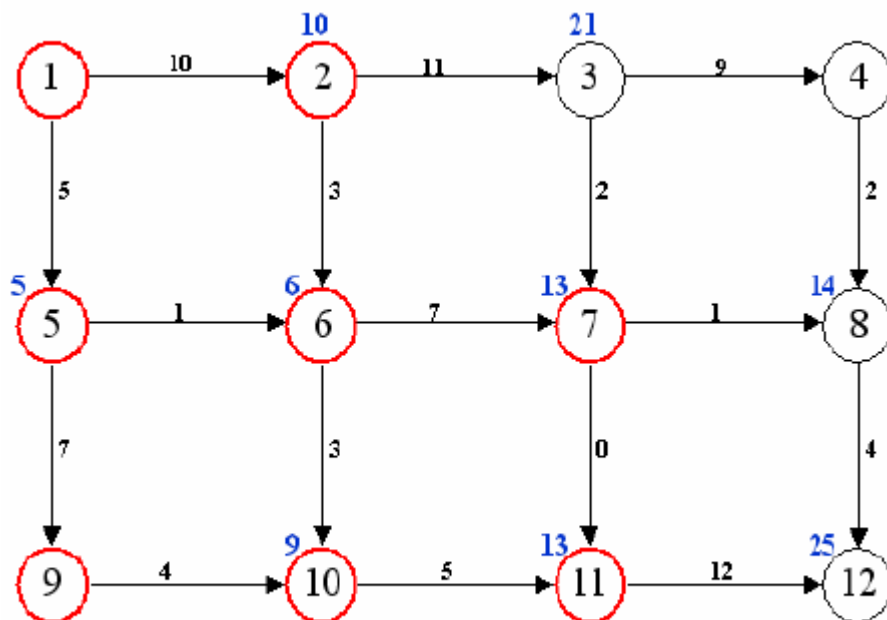


Figura 9: Grafo asociado al problema.

Iteración 9: El nodo que pertenece a  $V$  y que puede ser visitado a menor costo es el nodo 8 (a costo 14). Luego, los conjuntos quedan:  $T = \{1; 2; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$  y  $V = \{3; 4; 12\}$ . Los valores para la nueva iteración se muestran en la Figura 10.

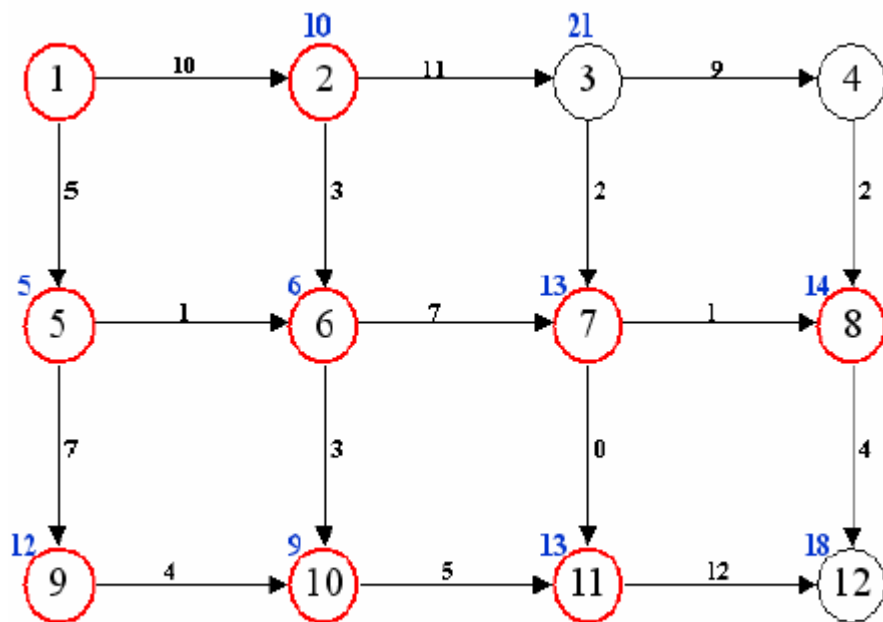


Figura 10: Grafo asociado al problema.

nodo 12 (a costo 18). Luego, los conjuntos quedan:  $T = \{1; 2; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$  y  $V = \{3; 4\}$ . Los valores para la nueva iteración se muestran en la Figura 11.

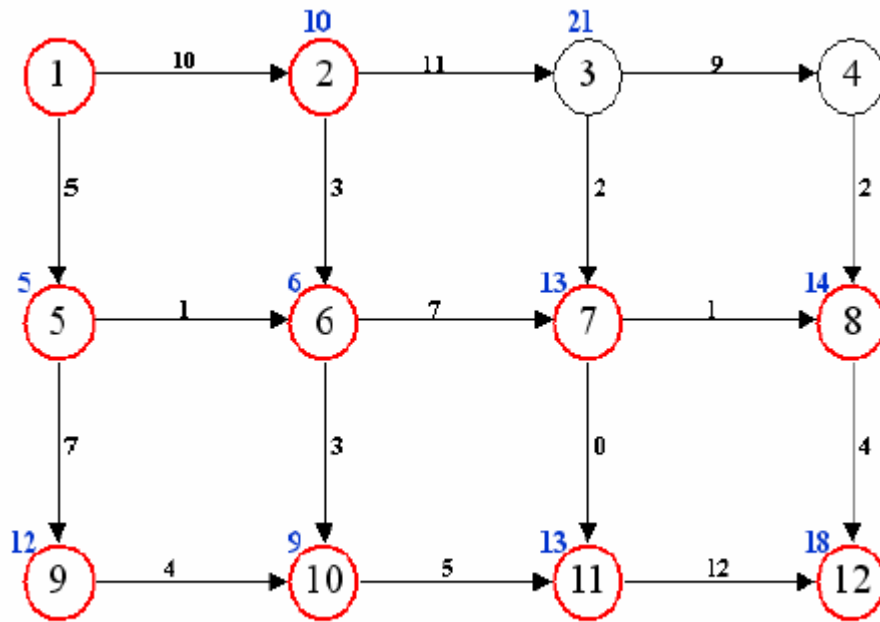


Figura 11: Grafo asociado al problema.

Iteración 11: El nodo que pertenece a  $V$  y que puede ser visitado a menor costo es el nodo 3 (a costo 21). Luego, los conjuntos quedan:  $T = \{1; 2; 3; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$  y  $V = \{4\}$ . Los valores para la nueva iteración se muestran en la Figura 12.

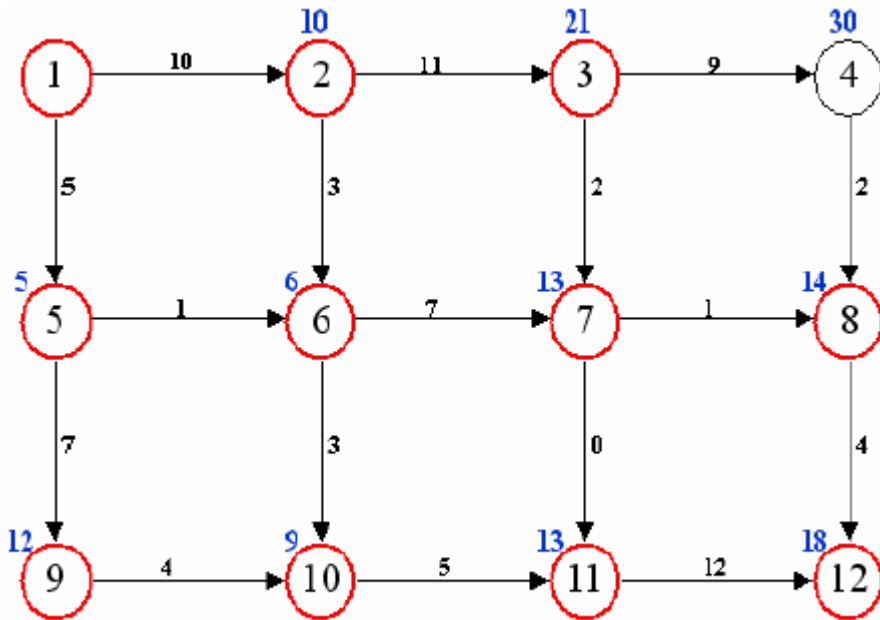


Figura 12: Grafo asociado al problema.



Iteración 12: El nodo que pertenece a  $V$  y que puede ser visitado a menor costo es el nodo 4 (a costo 30). Luego, los conjuntos quedan:  $T = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$  y  $V = \{\emptyset\}$ . Los valores para la nueva iteración se muestran en la Figura 13.

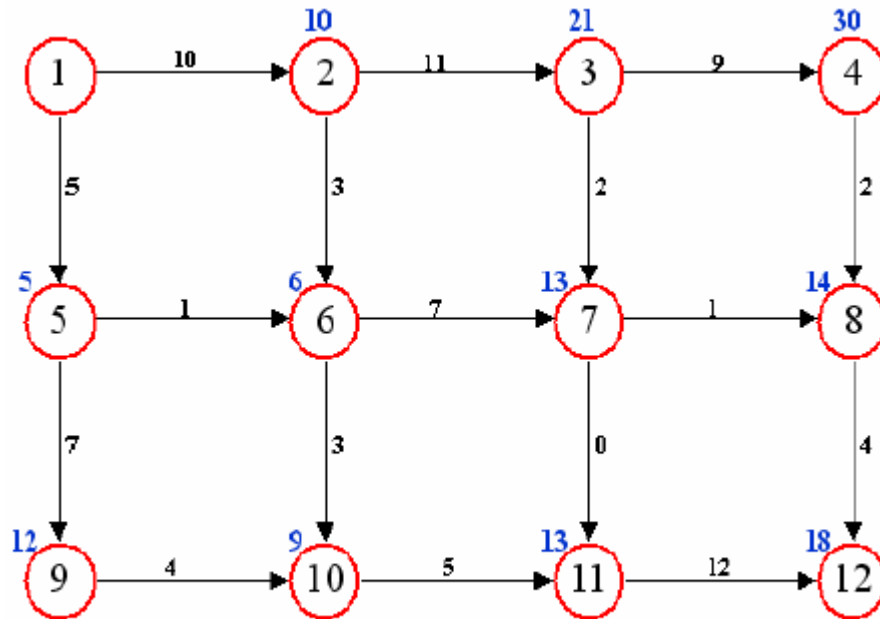


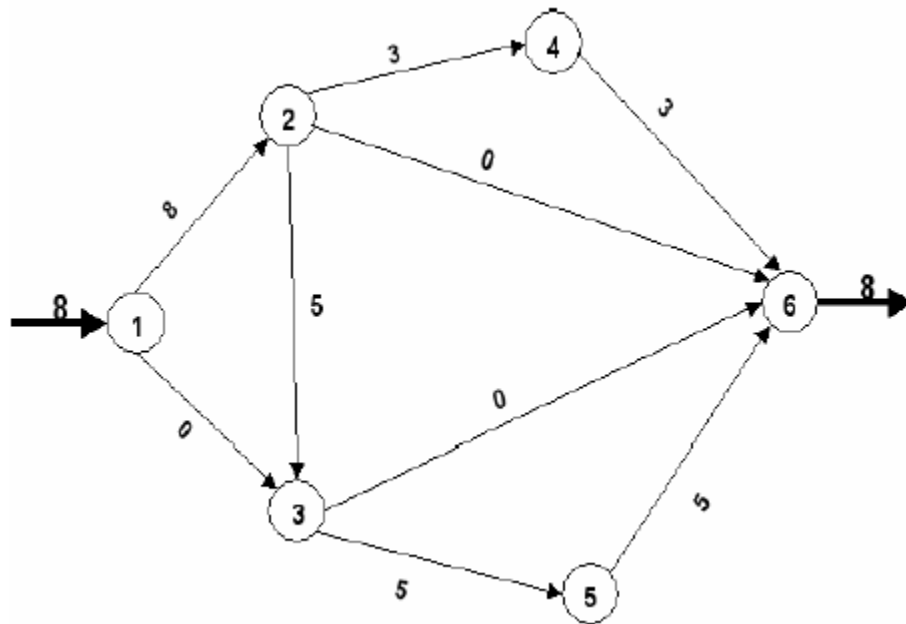
Figura 13: Grafo asociado al problema.

Luego, se ha encontrado la ruta más corta entre el nodo inicial 1 y todos los restantes nodos de la red.

## Problema 2

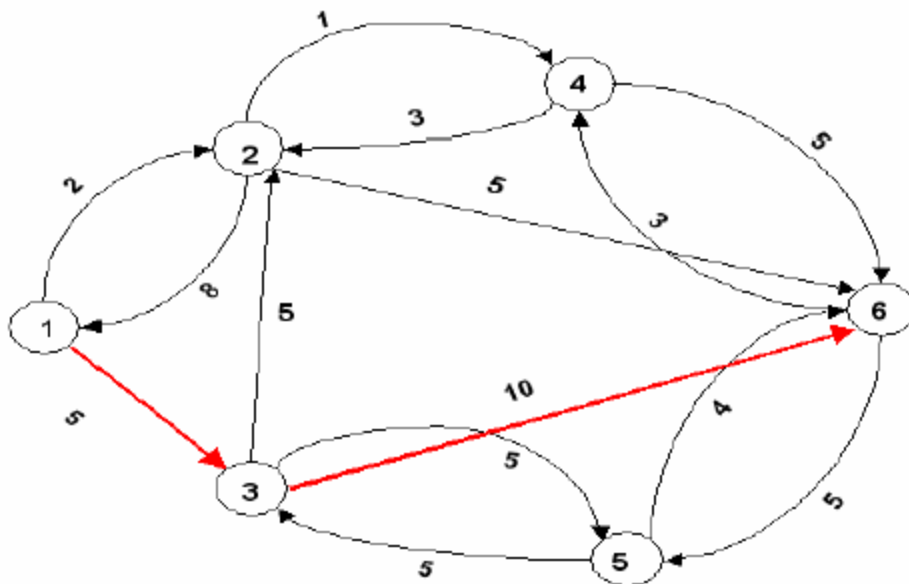
Para encontrar el flujo máximo que puede ser transportado a través de una red se puede utilizar el algoritmo de Ford y Fulkerson. Para ello, se necesita una solución factible inicial (flujos a transportar que respeten las cotas existentes y que exista conservación de flujo en cada nodo). Para este problema se procede como sigue:

Primero es necesario transformar la información inicial en un grafo adecuado para realizar Ford-Fulkerson, para ello en los arcos se debe tener información sobre le flujo factible inicial que pasa por el y tener presente las cotas máximas y mínimas de flujo que puede circular por el arco en cuestión. La Figura 2 muestra esto.

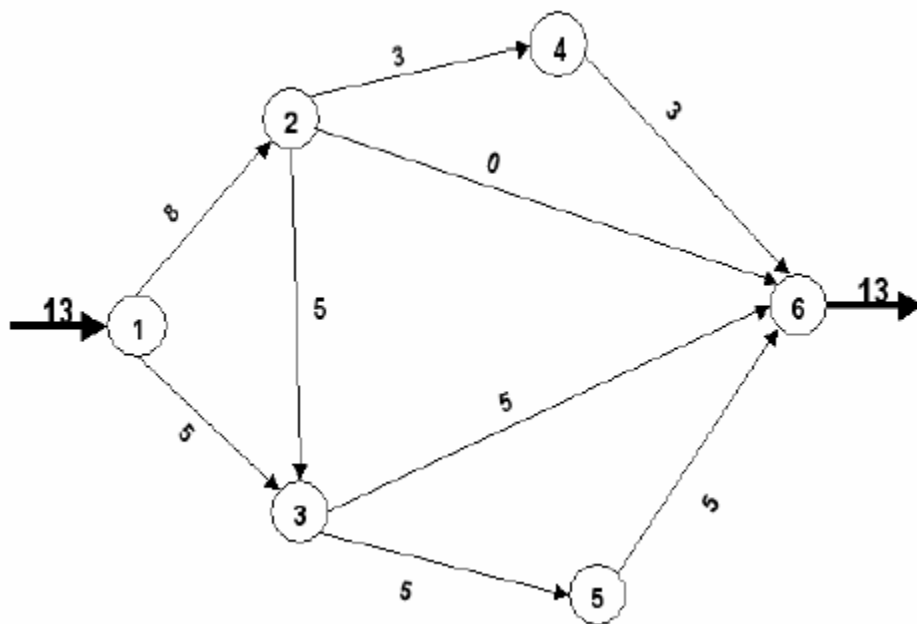


Con la información anterior se construye un nuevo grafo que contenga en cada nodo la información de las cantidades máximas y mínimas de flujo en que se puede modificar. Una vez construido este grafo con flujos incrementales, se debe escoger un camino que una el nodo origen con el nodo destino. Una alternativa para hacer esto es utilizar el Algoritmo de Dijkstra.

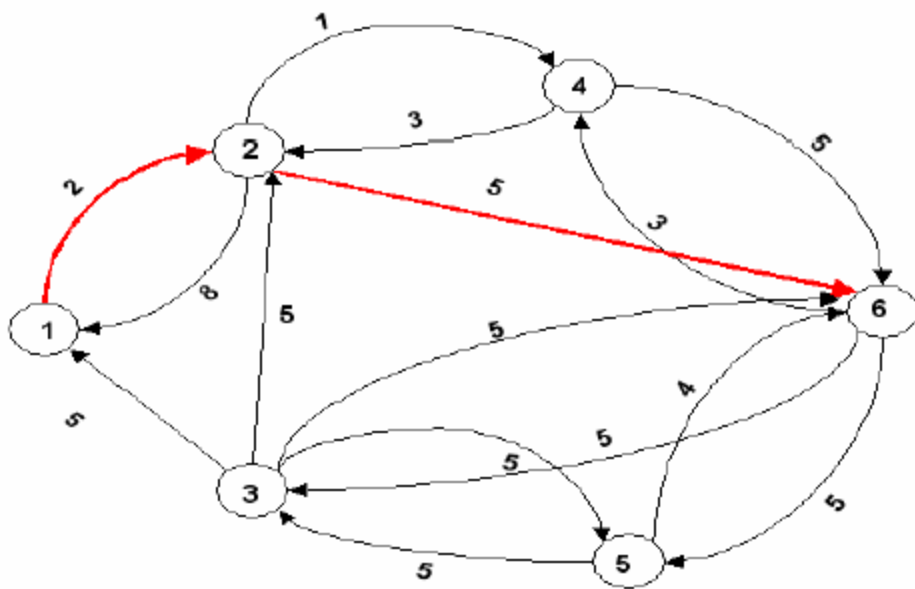
En esta iteración, se encontró el camino que se destaca en la Figura 3. Para decidir la cantidad de flujo que se incrementará en ese camino se debe escoger la cota mínima de flujo que satura alguna de las cotas de los arcos que lo componen.



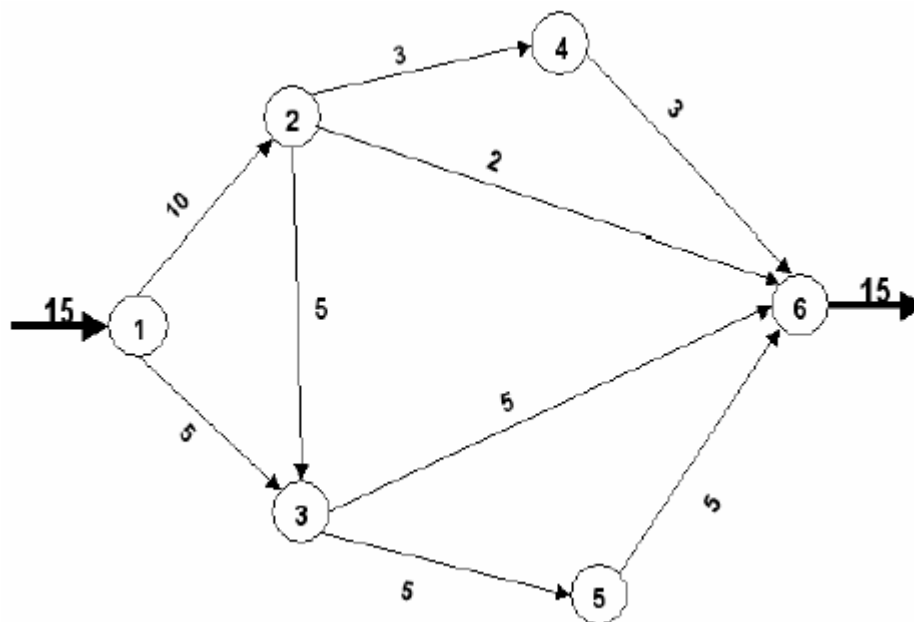
En este caso, el camino escogido es el que pasa por los nodos 1-3-6, y se puede observar que por el arco 1 - 3 es posible incrementar en 5 unidades el flujo mientras que por el arco 3 - 6 es posible incrementar en 10 unidades el flujo. Claramente, 5 unidades de flujo es la cantidad que es posible de incrementar por esa ruta sin violar las restricciones de capacidad. Esta nueva solución se muestra en la Figura 4.



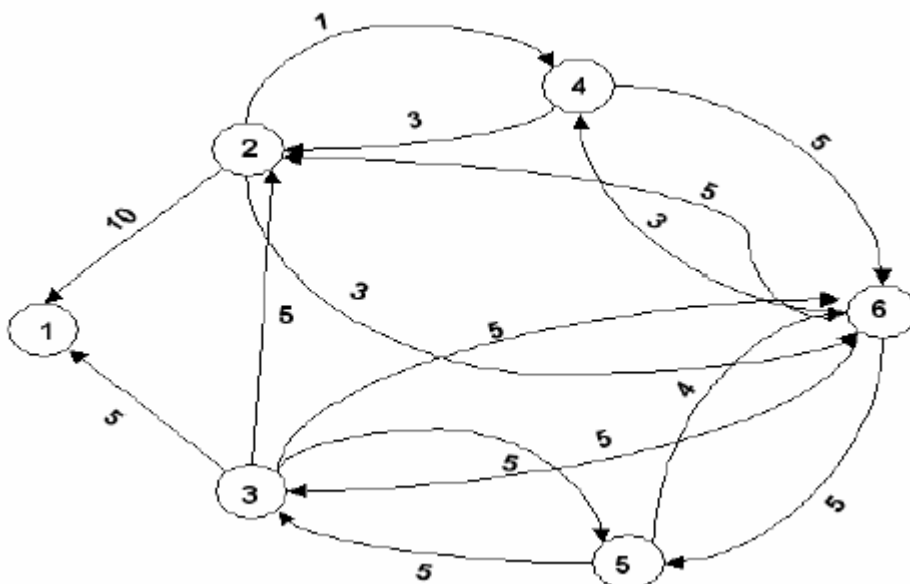
Nuevamente se repite el procedimiento de encontrar una red incremental de flujo, y se escoge el camino para aumentar flujo desde el nodo inicial al final. Esto se muestra en la figura 5.



Para determinar la cantidad de flujo máximo que se puede agregar a la red se debe inspeccionar el camino incremental escogido. En este caso, este camino está compuesto por los nodos 1-2-6. El flujo incremental máximo que es posible pasar por cada arco asociado a este camino incremental es por el arco 1 - 2 es posible incrementar en 2 unidades el flujo mientras que por el arco 2 - 6 es posible incrementar en 5 unidades el flujo. Claramente, 2 unidades de flujo es la cantidad que es posible de incrementar por esa ruta sin violar las restricciones de capacidad. Esta nueva solución se muestra en la Figura 6.



Nuevamente se repite el procedimiento de encontrar una red incremental de flujo, y se escoge el camino para aumentar flujo desde el nodo inicial al final. Esto se muestra en la figura 7.



En este caso es posible verificar que no se puede aumentar la cantidad de flujo que se esta transportando desde el nodo origen al nodo destino. Esto se puede apreciar en la red incremental dado que no es posible encontrar una salida desde el nodo 1 hacia el resto de nodos que conectan la red con el nodo 6, luego esto indica que se debe terminar con las iteraciones y que se ha encontrado el flujo máximo, el cual en este caso corresponde a 15 unidades, tal como se aprecia en la Figura 6.

Dudas y/o consultas:  
Marianela Pereira C.  
**mapereir@ing.uchile.cl**